Aula 17

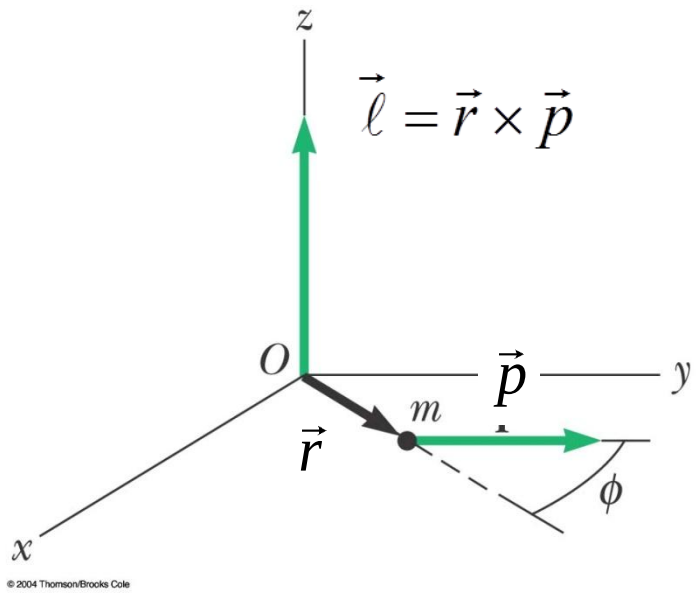
Conservação do momento angular

Sumário

- O momento angular;
- A segunda Lei de Newton na forma angular;
- O momento angular de um sistema de partículas;
- O momento angular de um corpo rígido que roda em torno de um eixo fixo;
- A conservação do momento angular.

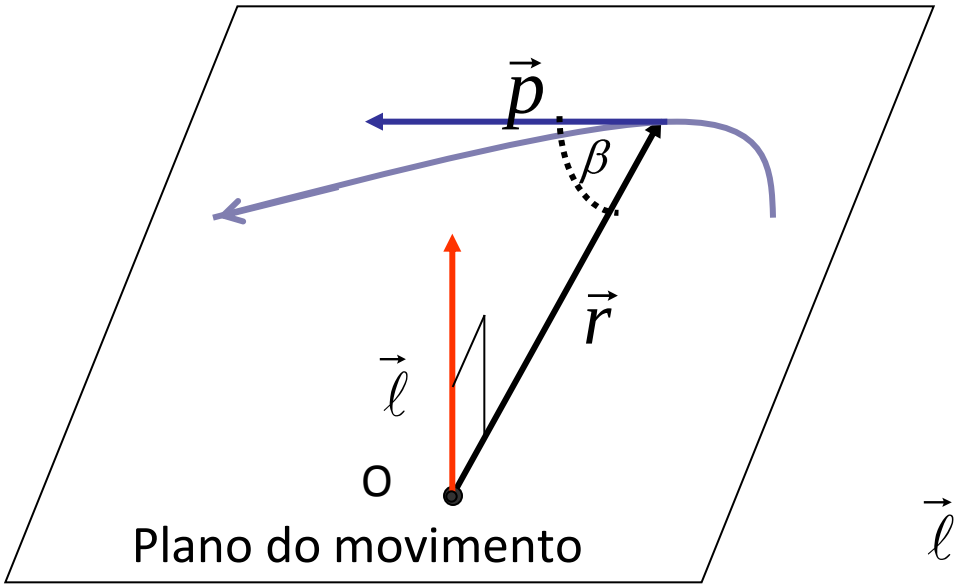
Momento Angular

O momento angular instantâneo, $\vec{\ell}$, de uma partícula em relação à origem *O* é definido como o produto vectorial do vector posição instantâneo da partícula, $\vec{r}$, e do seu momento linear instantâneo, $\vec{p}$

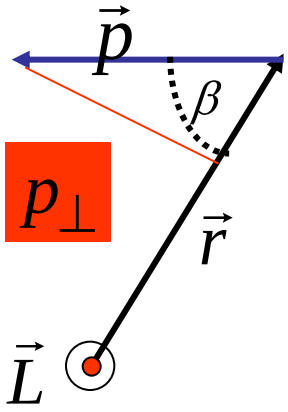


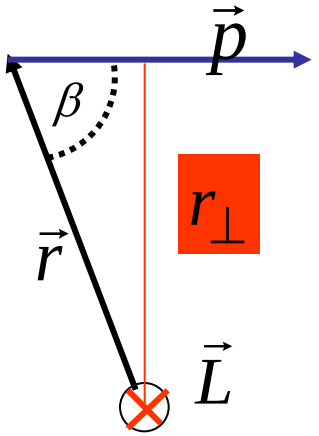
$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Momento Angular



Plano do movimento ≡ Plano da figura





$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{\ell}\right| \equiv \ell = rp\,sen\beta$$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\ \vec{r} \times \vec{v} \qquad \ell = r\ p_\perp = r\ mv_\perp \qquad \ell = r_\perp p = r_\perp mv$$

Momento de uma Força e Momento Angular

Para uma partícula: $\vec{\ell} = m\ \vec{r} \times \vec{v}$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right)$$

$$= m\ \vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}$$

$$= \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{res}} = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_{\text{res}}$$

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento de uma Força e Momento Angular

O momento da força está relacionado com o momento angular;

Da mesma forma que a força está ligada ao momento linear:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Esta é a forma rotacional da segunda Lei de Newton

$\vec{\ell}$ e $\sum \vec{\tau}$ devem estar calculados em relação ao mesmo ponto

A expressão é válida para qualquer ponto num referencial inercial;

Momento Angular

A unidade SI de momento angular é $kg \cdot m^2/s$

Tanto o módulo como a direcção de $\vec{\ell}$ dependem da escolha do ponto de referência

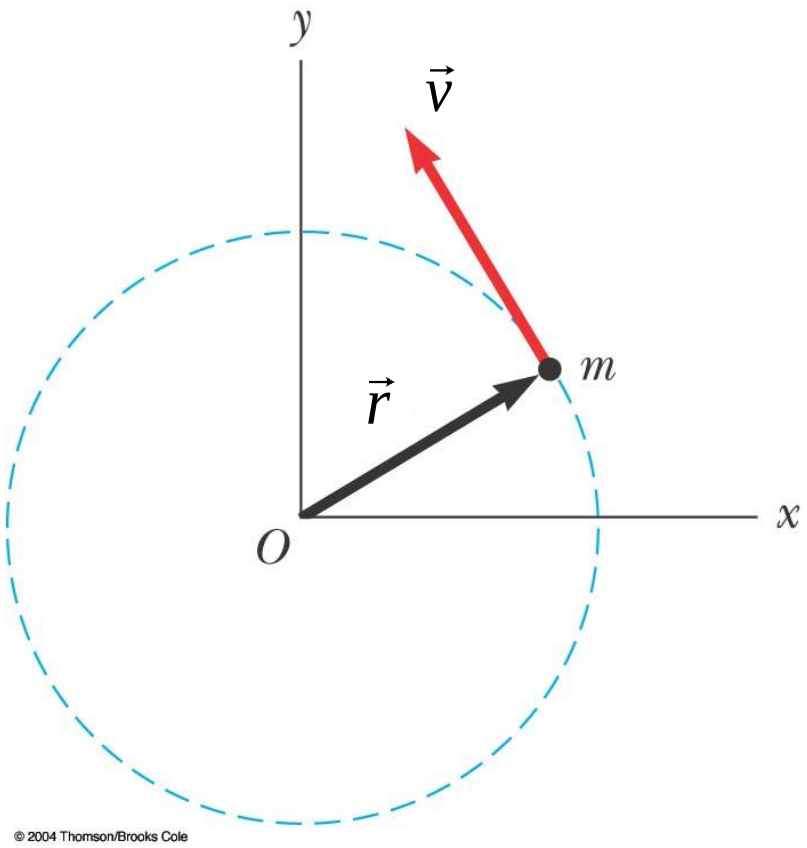
Momento Angular de uma Partícula, Exemplo

O vector $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ aponta para fora do diagrama;

O módulo é:

$$\ell = mvr \sin 90^{o} = mvr$$

Uma partícula com movimento circular uniforme possui momento angular constante em relação ao centro da trajectória.



Momento Angular de um Sistema de Partículas

O momento angular total de um sistema de partículas é, por definição, o vector soma dos momentos angulares das partículas que o constituem:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_N$$

Diferenciando em ordem ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Momento Angular de um Sistema de Partículas

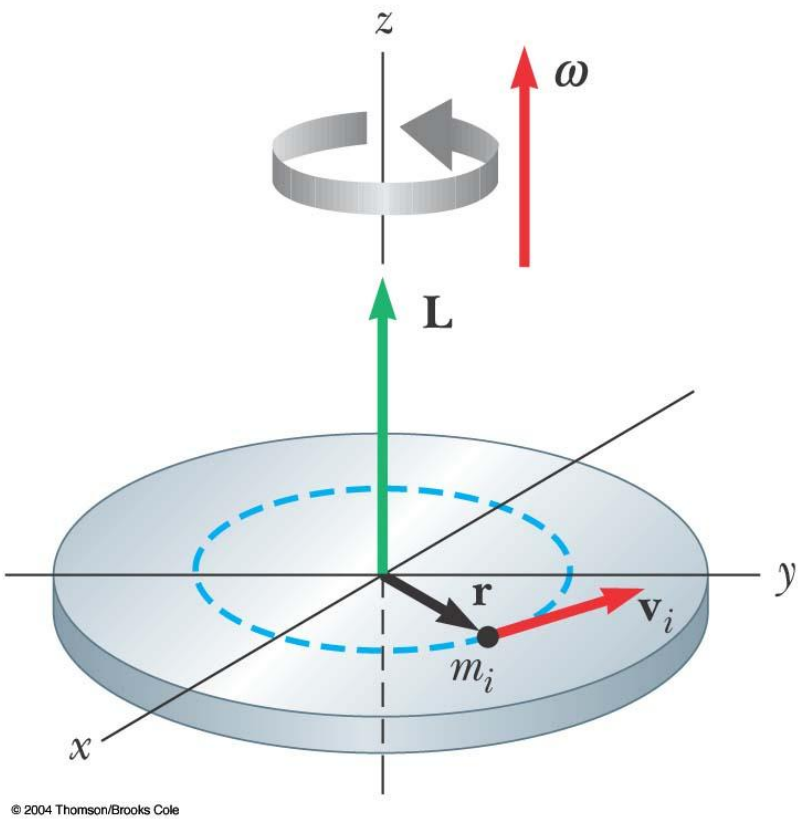
Os momentos das forças internas que actuam no sistema anulam-se dois a dois:

Portanto, $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$

O momento resultante das forças exteriores que actuam num sistema, em relação a um ponto de um referencial inercial, é igual à derivada temporal do momento angular total do sistema (calculado em relação ao mesmo ponto).

Momento Angular de um Corpo Rígido em Rotação

Cada partícula do corpo roda no plano *xy* em torno do eixo dos *z* com velocidade angular $\vec{\omega}$



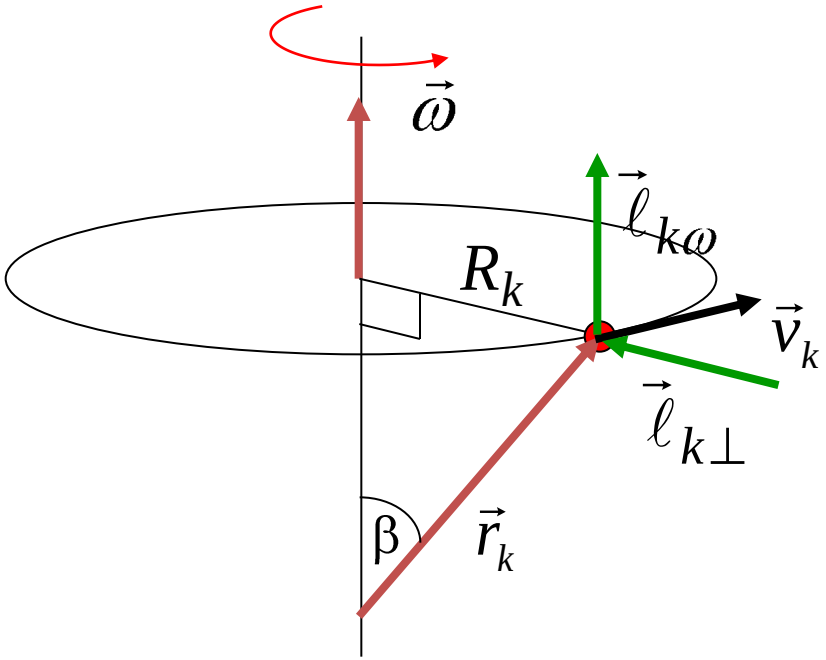
O módulo do momento angular de uma partícula é:

$$\ell_k = m_k r_k^{\,2} \omega$$

$\vec{\ell}_k$ e $\vec{\omega}$ têm a direcção e sentido do eixo dos *zz*.

Momento Angular de um Corpo Rígido em Rotação

Se o ponto de referência do momento angular não for o centro da trajectória circular, para cada partícula k temos uma componente do momento angular paralela a $\vec{\omega}$ e outra perpendicular:



$$\vec{\ell}_k = \vec{\ell}_{k\omega} + \vec{\ell}_{k\perp}$$

$$\vec{\ell}_k = m_k R_k{}^2 \vec{\omega} + \vec{\ell}_{k\perp}$$

$$\vec{L} = (\sum_k m_k R_k{}^2)\vec{\omega} + \sum_k \vec{\ell}_{k\perp} \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_\perp + I\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_\perp = 0 \Leftrightarrow$$ **Distribuição simétrica de massa em torno do eixo**

Momento Angular de um Corpo Rígido em Rotação

Obtemos o momento angular do corpo adicionando os momentos angulares das partículas individuais:

$$L_z = I\omega$$

Obtemos assim a forma rotacional da segunda Lei de Newton (corpo rígido, eixo fixo):

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Conservação do Momento Angular

O momento angular total de um sistema é constante, em módulo, direcção e sentido se o momento resultante das forças exteriores que actuam no sistema é nulo;

Momento de forças resultante = 0 $\Rightarrow$ significa que o sistema é isolado.

Para um sistema de partículas,

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \vec{L}_{\text{tot}_i} = \vec{L}_{\text{tot}_f}$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{\ell}_i = \text{constante}$$

Conservação do Momento Angular

Se a massa de um sistema isolado se redistribui, o momento de inércia varia;

A conservação do momento angular exige uma variação da velocidade angular:

$$I_i \, \omega_i = I_f \, \omega_f$$

Esta expressão é válida para rotação em torno de um eixo fixo e para rotação em torno de um eixo que passa no centro de massa de um sistema em movimento;

O momento de força resultante deve ser nulo em qualquer dos casos.

Sumário das Leis de Conservação

Para um sistema isolado -

(1) Conservação da Energia:

$$E_i = E_f$$

(2) Conservação do Momento Linear :

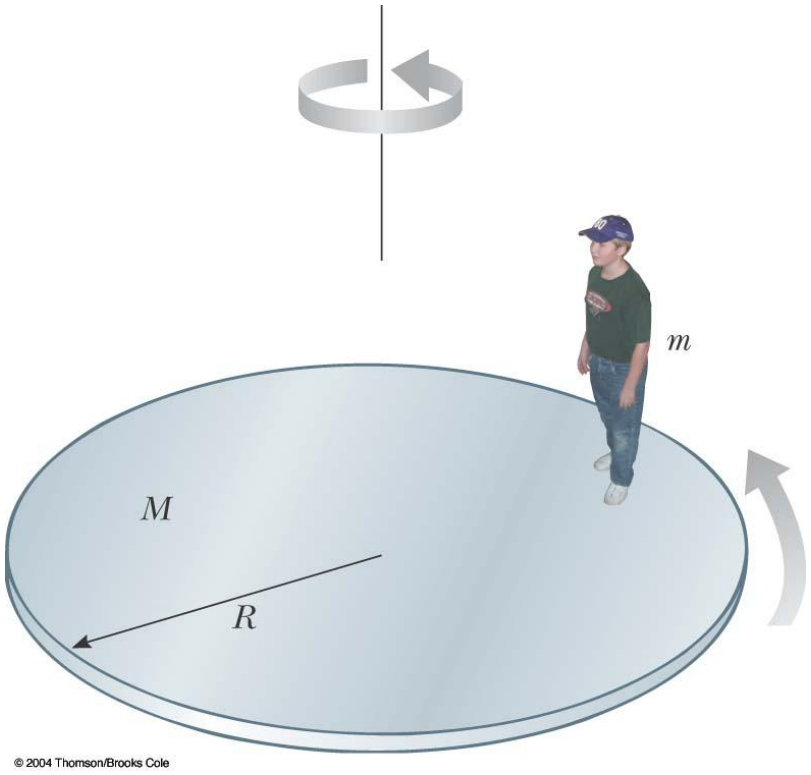
$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

(3) Conservação do Momento Angular:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Conservação do Momento Angular : O Carrossel

O momento de inércia do sistema, em relação ao eixo de rotação, é a soma do momento de inércia da plataforma e do momento de inércia da pessoa;

Supomos que a pessoa pode ser tratada como uma partícula;

Se a pessoa se move para o centro da plataforma o módulo da velocidade angular aumentará, para que $\vec{L}$ permaneça constante.